Le disequazioni

Questa versione stampabile dell'ipertesto ***Disequazioni*** è stata realizzata da Francesca Coppari – 3bprog – dicembre 2006

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Disequazioni di primo grado $\boxed{ax+b\geq 0}$

Una disequazione di primo grado va risolta in modo **simile** ad un'equazione; si tratta di esplicitare la variabile x ricordando però un'importante regola:

Moltiplicando o dividendo per un numero negativo va cambiato il verso della disequazione (perchè?)

Principi di equivalenza di una disequazione

Esempio

$-3x-9\geq 0$

$-3x\geq 9$

$x\leq -\frac{9}{3}$

$x\leq -3$

$]-\infty;-3]$

-3

Principi di equivalenza delle disequazioni

Due disequazioni di dicono equivalenti quando gli insiemi delle soluzioni coincidono.

Principi di equivalenza:

1) Aggiungendo (o togliendo) ai due membri di di una disequazione lo stesso polinomio si ottiene una disequazione equivalente alla data

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)\pm p(x)>g(x)\pm p(x)$$

2) Moltiplicando (o dividendo) i due membri di una disequazione per una stessa quantità **positiva** si ottiene una disequazione equivalente alla data

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow k\cdot f(x)>k\cdot g(x) \quad k>0$$

3) Moltiplicando (o dividendo) i due mebri di una disequazione per una stessa quantità **negativa** si ottiene una disequazione equivalente alla data **cambiando il verso**.

$$f(x)>g(x)\Leftrightarrow k\cdot f(x)<k\cdot g(x) \quad k<0$$

Procedimento grafico

Tale procedimento consiste nell'associare la disequazione ad una funzione di primo grado (retta). Con una rappresentazione grafica sommaria si tratta di vedere per quali valori della x tale retta si trova al di sopra (positiva) o al di sotto (negativa) dell'asse x.

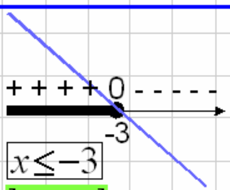
Esempio

$-3x-9\geq 0$

$y=-3x-9$

$-3x-9=0$

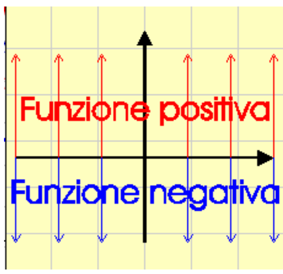
$x=-3$



$\boxed{x\leq -3}$

$]-\infty;-3]$

Per la rappresentazione grafica è sufficiente calcolare l'intersezione con l'asse delle x (equazione) e dedurre dal segno del coefficiente angolare l'inclinazione della retta.



O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O - O

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Disequazioni di secondo grado $\boxed{ax^2+bx+c\geq 0}$

Per risolvere una disequazione di secondo grado vanno innanzitutto calcolate le radici dell'equazione associata. Osservando poi segno del delta (o discriminante) e del parametro a si decide in quale/i intervallo/i è risolta secondo il seguente schema:

$a>0$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$\Delta>0$	$x<x_1 \cup x>x_2$	$x_1<x<x_2$	$x\leq x_1 \cup x\geq x_2$	$x_1\leq x\leq x_2$
$\Delta=0$	$R-\{x_1\}$	ϕ	R	$\{x_1\}$
$\Delta<0$	R	ϕ	R	ϕ

$a<0$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$\Delta>0$	$x_1<x<x_2$	$x<x_1 \cup x>x_2$	$x_1\leq x\leq x_2$	$x\leq x_1 \cup x\geq x_2$
$\Delta=0$	ϕ	$R-\{x_1\}$	$\{x_1\}$	R
$\Delta<0$	ϕ	R	ϕ	R

Calcolo delle radici di un'equazione di 2° grado.

tipo $ax^2+bx+c=0$ $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

tipo $ax^2+bx=0$ $\quad x_1=0; x_2=-\frac{b}{a}$

tipo $ax^2+c=0$ $\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Delta (o discriminante) di un'equazione di 2° grado.

$$\Delta=b^2-4ac$$

Esempio 1 $-x^2+x+6\ge 0$

$a=-1$ $\Delta=25$ $x_1=-2$ $x_2=3$ $\boxed{-2\le x\le 3}$ $[-2;3]$

Esempio 2 $3x^2-12>0$

$a=3$ $\Delta=144$ $x_{1,2}=\pm 2$ $\boxed{x<-2 \cup x>2}$ $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Esempio 3 $x^2+x+2<0$

$a=1$ $\Delta=-8$ $\boxed{\Phi}$

Procedimento grafico

Tale procedimento consiste nell'associare la disequazione ad una funzione di secondo grado (parabola). Con una rappresentazione grafica sommaria si tratta di vedere per quali valori della x tale parabola si trova al di sopra (positiva) o al di sotto (negativa) dell'asse x.

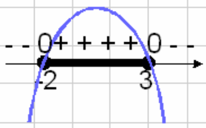
Esempio

$-x^2+x+6\ge 0$

$y=-x^2+x+6$

$-x^2+x+6=0$

$x_1=-2$ $x_2=3$

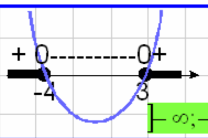


$\boxed{-2\le x\le 3}$ $[-2;3]$

Per la rappresentazione grafica è sufficiente calcolare l'intersezione con l'asse delle x (equazione) e dedurre dal segno del parametro a il verso della concavità della parabola.

Esempio 1 $x^2+x-12\ge 0$

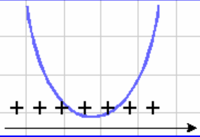
$x_1=-4$ $x_2=3$



$\boxed{x\le -4 \cup x\ge 3}$ $]-\infty;-4]\cup[3;+\infty[$

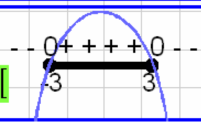
Esempio 2 $x^2+x+2<0$

$\boxed{\Phi}$



Esempio 3 $-x^2+9>0$

$\boxed{-3<x<3}$ $]-3;3[$



O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O - O

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Disequazioni di grado superiore al secondo $ax^3+bx^2+cx+d\ge 0$

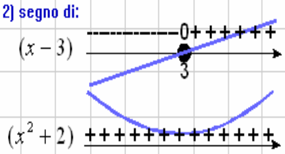
Per risolvere tali disequazioni occorre eseguire i seguenti punti:

1) Scomporre il polinomio in fattori, ovvero trasformarlo nel prodotto di polinomi di primo o di secondo grado.
2) Studiare il segno dei polinomi del prodotto.
3) Confrontare il segno dei polinomi con uno schema grafico.
4) Individuare l'intervallo (o gli intervalli) soluzione.

Esempio $x^3-3x^2+2x-6\ge 0$

1) $(x-3)(x^2+2)\ge 0$

2) segno di:



3) Prodotto ------------0++++++

4) Soluzione: $\boxed{x\ge 3}$ $[3;+\infty[$

Principali regole di scomposizione in fattori

Differenza fra due quadrati

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

Somma (o differenza fra due cubi)

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

Trinomio di secondo grado e biquadratiche

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$ax^4+bx^2+c=a(x^2-x_1)(x^2-x_2)$

Raccoglimento a fattor comune

$ax^3+bx^2+cx=x(ax^2+bx+c)$

$ax^3+bx^2+ax+b=$

$=x^2(ax+b)+ax+b=$

$=(ax+b)(x^2+1)$

Quadrato di un binomio

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

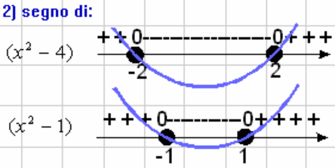
Cubo di un binomio

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

Esempio 2 $x^4-5x^2+4>0$

1) $(x^2-4)(x^2-1)>0$

2) segno di:



3) Prodotto + + 0--0+ + + + 0--0+ + +

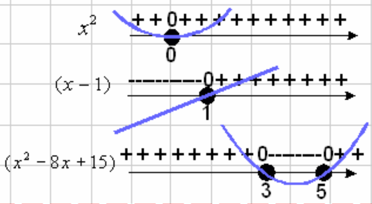
4) Soluzione: $x<2 \cup -1<x<1 \cup x>2$

$]-\infty;2[\cup]-1;1[\cup]2;+\infty[$

Esempio 3 $x^5-9x^4+23x^3-15x^2<0$

1) $x^2(x-1)(x^2-8x+15)<0$

2) segno di:



3) Prodotto -----0--0+ + + 0------0+ +

4) Soluzione: $\boxed{x<0 \cup 0<x<1 \cup 3<x<5}$

$]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]3;5[$

DISEQUAZIONI RAZIONALI FRATTE

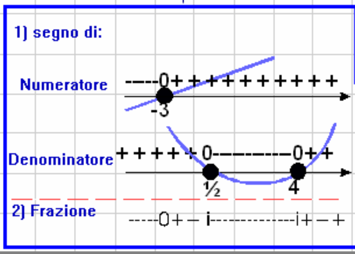
Disequazioni razionali fratte

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

Il procedimento risolutivo, molto simile a quello delle disequazioni di grado superiore al secondo, si articola nei seguenti punti:

1) Studiare il segno del numeratore f(x) e del denominatore g(x)
2) Confrontare il segno di numeratore e di denominatore.
3) Individuare l'intervallo (o gli intervalli) soluzione facendo attenzione nell'**escludere** i punti in cui si annulla il denominatore.

Esempio $\dfrac{x+3}{2x^2-9x+4} \geq 0$



3) Soluzione:

$$\boxed{-3 \leq x < \frac{1}{2} \cup x > 4}$$

$[-3;1/2[\cup]4;+\infty[$

ATTENZIONE

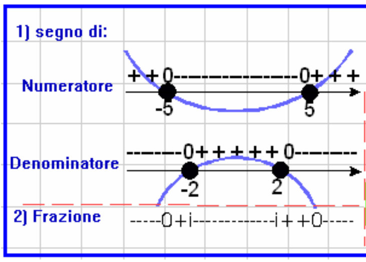
si possono verificare i seguenti casi:

$$\frac{\neq 0}{0} \Rightarrow impossibile$$

$$\frac{0}{0} \Rightarrow indeterminata$$

Entrambi i casi verranno indicati con i

Esempio 2 $\dfrac{x^2-25}{4-x^2} \leq 0$



3) Soluzione:

$x \leq -5 \cup -2 < x < 2 \cup x \geq 5$

$]-\infty;-5]\cup]-2;2[\cup[5;+\infty[$

O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O - O

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Sistemi di disequazioni

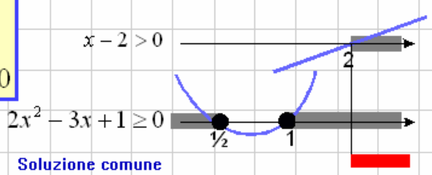
$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Il procedimento risolutivo si articola nei seguenti punti:

1) Risolvere le varie disequazioni del sistema
2) Confrontare gli intervalli soluzione contrassegnandoli su rette parallele.
3) Individuare l'intervallo (o gli intervalli) con soluzioni comuni a tutte le disequazioni.

Esempio

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x^2-3x+1 \geq 0 \end{cases}$$



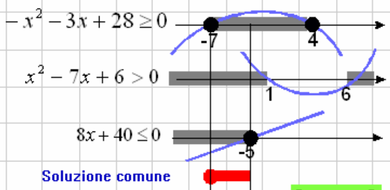
Soluzione comune

$\boxed{x > 2}$ $]2;+\infty[$

$$\begin{cases} g(x) \leq 0 \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Esempio 2

$$\begin{cases} -x^2-3x+28 \geq 0 \\ x^2-7x+6>0 \\ 8x+40 \leq 0 \end{cases}$$



Soluzione comune

$\boxed{-7 \leq x < -5}$ $[-7;-5[$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Disequazioni irrazionali $\quad \boxed{f(x) \geq \sqrt{g(x)}}$

Occorre fare due importanti premesse:

1) Una radice con indice PARI esiste solo per valori dell'argomento non negativi $\quad \boxed{\sqrt[n]{f(x)} \text{ con n pari } \Rightarrow f(x) \geq 0}$

2) Una radice con indice PARI, quando esiste, è sempre positiva o uguale a 0. $\quad \boxed{\sqrt[n]{f(x)} \geq 0 \text{ con n pari}}$

Verranno presi in esame i seguenti tipi di disequazioni:

$f(x) > \sqrt[n]{g(x)}$ con n pari

$f(x) < \sqrt[n]{g(x)}$ con n pari

$f(x) \geq (\text{o} <) \sqrt[n]{g(x)}$ con n dispari

$\sqrt[n]{f(x)} \geq (\text{o} <) \sqrt[n]{g(x)}$ con n pari

$f(x) > \sqrt[n]{g(x)}$ con n pari

Tale disequazione va risolta con il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \\ [f(x)]^n > g(x) \end{cases}$$

condizione per l'esistenza della radice

f(x) dovendo essere maggiore di un numero positivo deve, a sua volta, essere positiva

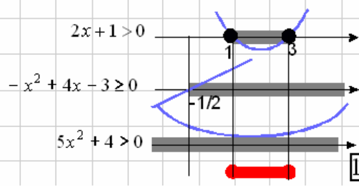
i due termini della disequazione vanno confrontati eliminando la radice (potenza n-sima)

Esempio

Esempio

$2x + 1 > \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ (2x+1)^2 > -x^2 + 4x - 3 \end{cases}$$



$[1;3]$

$\boxed{1 \leq x \leq 3}$

$f(x) < \sqrt[n]{g(x)}$ con n pari

Tale disequazione va risolta con l'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

U

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x)^n < g(x) \end{cases}$$

condizione per l'esistenza della radice

se f(x) fosse negativo sicuramente la disequazione sarebbe verificata. (negativo<positivo!!)

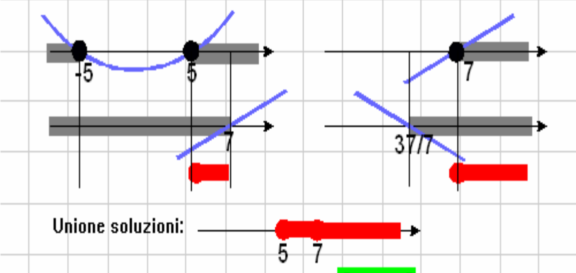
Nel caso contrario, ovvero f(x)≥0, occorre confrontare i due termini eliminando la radice (potenza n-sima)

Esempio

Esempio

$x - 7 < \sqrt{x^2 - 25}$

$$\begin{cases} x^2 - 25 \geq 0 \\ x - 7 < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ (x-7)^2 < x^2 - 25 \end{cases}$$



$\boxed{x \geq 5}$

$[5;+\infty[$

$f(x) \geq (\text{o} <) \sqrt[n]{g(x)}$ con n dispari

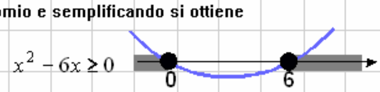
Tale disequazione va risolta semplicemente confrontando i due termini eliminando la radice (potenza n-sima) $\quad \boxed{f(x)^n \geq (\text{o} <) g(x)}$

Esempio

$1 - 2x \geq \sqrt[3]{1 + 11x^2 - x^3}$

$(1-2x)^3 \geq 1 + 11x^2 - x^3$

sviluppando il cubo del binomio e semplificando si ottiene



$\boxed{x \leq 0 \quad \cup \quad x \geq 6}$

$]-\infty;0] \cup [6;+\infty[$

$\sqrt[n]{f(x)} \geq (o<) \sqrt[n]{g(x)}$ con n pari

Tale disequazione va risolta con il seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (o<) g(x) \end{cases}$$

condizioni per l'esistenza delle radici

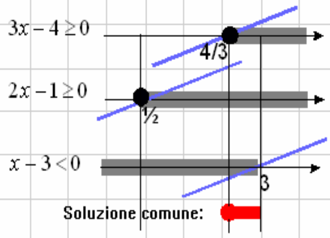
Confronto dei due termini della disequazione eliminando la radice (potenza n-sima)

Esempio

Esempio
$\sqrt{3x-4} < \sqrt{2x-1}$

Sistema risolutivo:

$$\begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 3x-4 < 2x-1 \end{cases}$$



$\boxed{\frac{4}{3} \leq x < 3}$ $\left[\frac{4}{3};3\right[$

O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O – O - O

DISEQUAZIONI IN VALORE ASSOLUTO (MODULO)

Disequaz. in Valore assoluto $f(x)<|g(x)|$

Verranno trattati solo due casi di disequazione in valore assoluto (o in modulo): $|f(x)|<k$ $|f(x)|>k$ $k>0$

Tali disequazioni permettono di risolvere agevolmente particolari disequazioni di secondo grado.

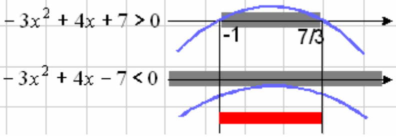
Primo caso: $|f(x)|<k$

La disequazione è equivalente alla seguente "doppia disequazione":

$-k<f(x)<k$ ovvero al sistema: $\begin{cases} f(x)>-k \\ f(x)<k \end{cases}$

Esempio
$|4x-3x^2|<7$

La disequazione è equivalente al sistema $\begin{cases} 4x-3x^2>-7 \\ 4x-3x^2<7 \end{cases}$



$\boxed{-1<x<\frac{7}{3}}$ $\left]-1;\frac{7}{3}\right[$

Il valore assoluto (o modulo) è un operatore che trasforma il suo contenuto in positivo.

Esempi:

|-3|=3 |3|=3

In generale:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x<0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

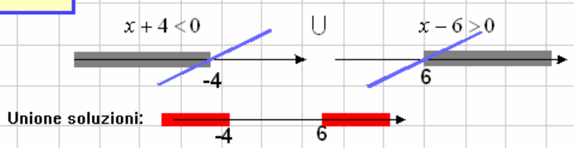
Secondo caso: $|f(x)|>k$

La disequazione è equivalente all'unione delle seguenti disequazioni:

$x<-k \ \cup \ x>k$

Esempio
$|x-1|>5$

La disequazione è equivalente a: $x-1<-5 \ \cup \ x-1>5$



$\boxed{x<-4 \cup x>6}$ $]-\infty;-4[\ \cup \ ]6;+\infty[$

Unire due (o più) disequazioni vuol dire aggiungere ai risultati dell'una i risultati dell'altra (o delle altre)

Procedimento grafico

Tale procedimento consiste nell'associare ai due termini della disequazione (a sinistra e a destra del verso) due funzioni, di rappresentarle graficamente e di confrontarle osservando gli andamenti grafici.

(come rappresentare graficamente una funzione in valore assoluto)

Esempio 1

Esempio 2

ESEMPIO 1

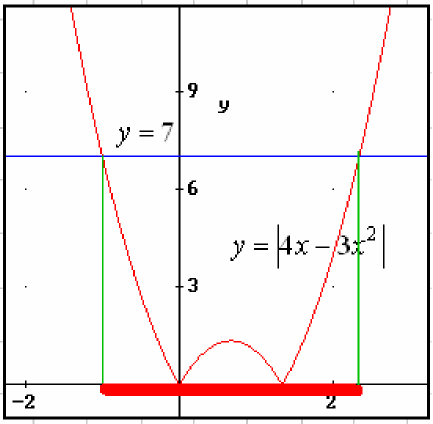
$\boxed{|4x - 3x^2| < 7}$

Funzioni da rappresentare e confrontare graficamente:

$y = 7 \quad y = |4x - 3x^2|$

Nell'intervallo evidenziato in rosso la funzione y=7 è al di sopra della f. in valore assoluto, dunque la disequazione risulta verificata. Le ascisse dei punti estremi vanno calcolate come punto di incontro fra le due funzioni: $\begin{cases} y = 4x - 3x^2 \\ y = 7 \end{cases}$

$\boxed{-1 < x < \frac{7}{3}}$ $\quad \left]-1; \frac{7}{3}\right[$



ESEMPIO 2

$\boxed{|x - 1| > 5}$

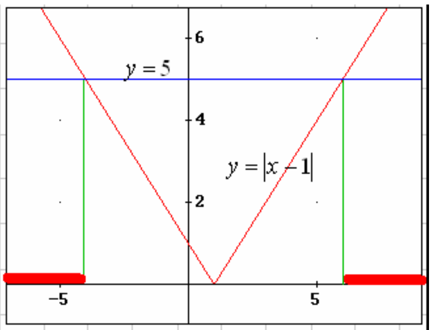
Funzioni da rappresentare e confrontare graficamente:

$y = 5 \quad y = |x - 1|$

Negli intervalli evidenziati in rosso la funzione y=5 è al di sotto della f. in valore assoluto, dunque la disequazione risulta verificata. Le ascisse dei punti estremi vanno calcolate come punto di incontro fra le due funzioni:

$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - x \\ y = 5 \end{cases}$

$\boxed{x < -4 \cup x > 6}$ $\quad]-\infty; -4[\cup]6; +\infty[$



Per rappresentare graficamente una funzione in modulo:

1) Si rappresenta graficamente la funzione ignorando il modulo

2) Della parte negativa della funzione (al di sotto dell'asse x) si disegna il <u>simmetrico rispetto all'asse delle x</u> e si considera solo quest'ultima parte.

Dunque tutta la funzione è disegnata solo sopra l'asse delle x.

Esempio: $y = |x^2 + x - 6|$