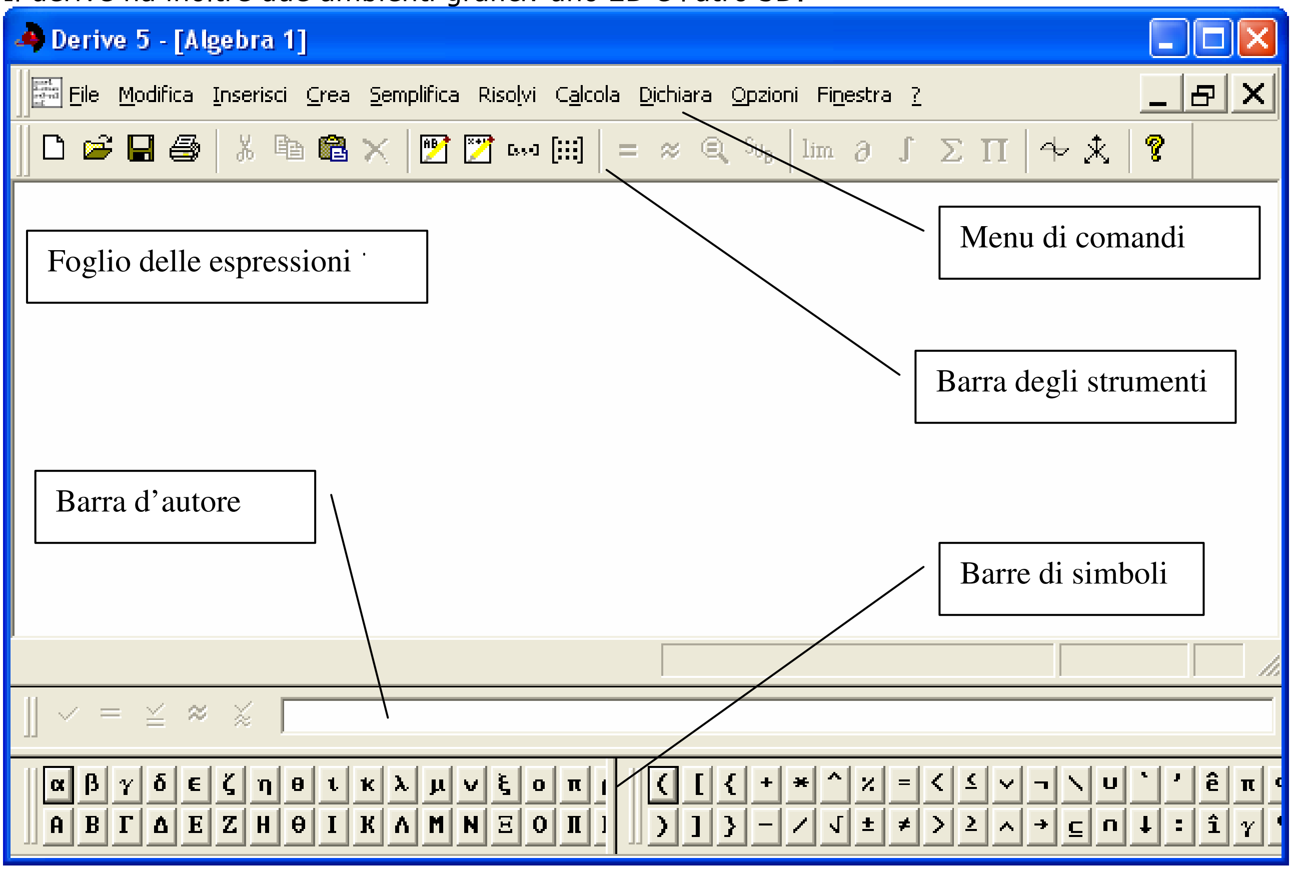
Uso del Derive (versione 5.5) per lo studio di funzioni

Paolo Urbani – febbraio 2007

Il Derive è un potente programma di calcolo algebrico; risolve equazioni, disequazioni, sistemi, limiti, derivate, integrali, ecc; esegue calcolo numerico e letterale; rappresenta grafici sia in 2D che in 3D.
E' un software piuttosto snello; la sua cartella occupa 5MB e può essere copiata anche in una PEN-DRIVE senza bisogno di installazione.
Viste le notevoli potenzialità si presta particolarmente per lo studio di funzioni ad una e due variabili.

Interfaccia

L'interfaccia è piuttosto sobria; oltre al menu di comandi presenta una barra degli strumenti che permette di eseguire velocemente operazioni più comuni. Segue poi una zona bianca dove verranno inserite le varie espressioni, numerate progressivamente con l'indicazione #*n*; le espressioni potranno essere intercalate da oggetti testo, oggetti grafici e oggetti OLE (realizzati con altri applicativi Windows). Segue infine la barra d'autore, nella quale verranno scritte le espressioni, e due gruppi di simboli che possono risultare utili alla scrittura di espressioni: lettere greche e simboli matematici.
Avendo una buona familiarità con i comandi del Derive tutte le operazioni si possono effettuare mediante la barra d'autore evitando completamente l'uso di comandi di menù e della barra degli strumenti; si insegnerà a fare un uso combinato del tutto.
Il derive ha inoltre due ambienti grafici: uno 2D e l'atro 3D.



Uso del Derive

Il Derive può essere utilizzato sostanzialmente in due modi:
Usa e getta. Si tratta di un uso stile calcolatrice scientifica: si svolge il problema su carta e si utilizza il Derive per fare i calcoli; alla fine del lavoro il foglio può anche non essere salvato in quanto non riutilizzabile; in questa modalità d'uso si utilizzeranno principalmente i pulsanti della barra degli strumenti.
Riutilizzabile. Si tratta di impostare delle espressioni adatte a certi tipi di studi (problemi di derivata, studi di funzione, ecc…) intercalate da righe di commento; un foglio di questo tipo è riutilizzabile cambiando i valori iniziali e semplificando le espressioni conseguenti.

Esempio:

Calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione $y = 4x^3 + 18x$ nel suo punto di ascissa 3

Modo ***Usa e Getta***

Inserisco la funzione	#1 $y=4x^3+18x$
Calcolo la derivata con il pulsante ∂	#3 $12x^2+18$

Sostituisco il numero 3 nella funzione con il pulsante	`#4 162`
Sostituisco il numero 3 nella derivata con il pulsante	`#5 126`
Scrivo l'equazione della funzione	`#6 y=162=126(x-3)`

Modo ***Riutilizzabile***

Inserisco la funzione dichiarandola come funzione	`#1 f(x):=4x`^{3}`+18x`
Assegno l'ascissa del punto ad una variabile a	`#2 a:=3`
Definisco l'equazione della retta tangente in a	`#3 y=f(a)+f'(a)(x-a)`

A questo punto basta semplificare l'espressione 3 (pulante). Il lavoro è utilizzabile: si modificano le espressioni 1 e 2 (tasto Invio dopo averle selezionate) e si semplifica l'espressione 3.

L'esempio può essere completato rappresentando graficamente funzione e tangente; per effettuare il grafico:

1) selezionare la funzione da rappresentare
2) Aprire la pagina grafica 2D (pulsante)
3) Disegnare la funzione (pulsante)

Per tornare alla pagina algebra (con le espressioni) premere il pulsante ; è opportuno tenere le finestre Algebra e Grafica contemporaneamente aperte tramite il menu *Finestra/Affianca verticalmente.*
Il grafico non viene salvato; per conservarlo occorre portarlo nella pagina Algebra tramite il comando *File/Incorpora* dato nell'ambiente Grafica.

Elenco di alcune funzioni di Derive

nome	uso	Argomenti	esempio	Pulsante equivalente
`SOLVE`	Risolve equazioni, disequazioni e sistemi	Equazione/sistema, variabile/i, tipo soluzioni	`SOLVE(x^2-4x=0,x,Real)`	
`DIF`	Calcola derivate	Funzione,variabile, ordine di derivazione	`DIF(f(x),x,1)`	∂
`LIM`	Calcola limiti	Funzione,variabile,tendenza	`LIM(f(x),x,inf)`	lim
`SUBST`	Sostituisce valori a variabili	Espressione, valore vecchio, valore nuovo	`SUBST(f(x),x,5)`	SUB

Importante
Per evitare di riscrivere testi già presenti nel foglio Derive si usa il tasto **F3**; se premuto riporta nella barra d'autore l'espressione selezionata (o parte dell'espressione).
Ovviamente si può utilizzare anche la sequenza copia/incolla.

Studio di una funzione fratta

In questa sezione verrà predisposto un file di Derive ***riutilizzabile***, ovvero contenente tutti gli strumenti per effettuare lo studio; una volta costruito e salvato, cambiando la funzione iniziale, si potranno facilmente effettuare tutti gli studi.

Lo studio seguente è scaricabile all'indirizzo
http://www.cuppari.an.it/matematica/informatica/Strumenti%20studio%20funzione.zip

Esempio: si vuole studiare la funzione $y=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$

Impostazione del file

Premessa: è conveniente intercalare le espressioni con degli oggetti testo (inseribili mediante il pulsante) che servono a commentare e spiegare gli inserimenti fatti)

Immissione della funzione

Conviene separare l'immissione di numeratore e denominatore (per impostare lo studio del dominio)

$$\#1:\quad Num(x) := x^3 - 1$$

$$\#2:\quad Den(x) := x^2 - 4$$

$$\#3:\quad f(x) := \frac{Num(x)}{Den(x)}$$

Studio del dominio

Occorre impostare un'equazione che calcoli gli zeri del denominatore

`#4:   SOLVE(Den(x) = 0, x, Real)`

Calcolo di asintoti

Asintoto verticale

Andranno calcolati i limiti nel/i punto/i individuato/i risolvendo l'equazione precedente (#4)

Asintoto orizzontale

Se esiste avrà un'equazione del tipo

$$\#5:\quad y = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Asintoto obliquo

Predisponiamo tre espressioni: una per il calcolo di m, una per q ed una per l'equazione dell'asintoto:

$$\#6:\quad m := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\#7:\quad q := \lim_{x \to \infty} (f(x) - m \cdot x)$$

$$\#8:\quad y = m \cdot x + q$$

Studio del segno

Predisponiamo le seguenti espressioni:

$$\#9:\quad f(x) > 0 \wedge y < 0$$

$$\#10:\quad f(x) < 0 \wedge y > 0$$

Queste andranno rappresentate graficamente; serviranno a "colorare" le zone dove la funzione non passa; dove la funzione è positiva andrà colorata la parte negativa e viceversa.

Intersezioni con gli assi cartesiani

Serviranno le seguenti due espressioni:

asse x

`#11:   SOLVE(f(x) = 0, x, Real)`

asse y

$$\#12:\quad y = f(0)$$

Studio di crescenza (estremi relativi) e concavità (flessi)

Verrà utilizzato il metodo delle derivate successive: saranno dunque necessarie almeno le prime tre derivate, che conviene dichiarare come funzioni; per la creazione delle derivate va utilizzata la funzione `DIF(f(x),x,`*`ordine della derivata`*`)`

$$\#13:\quad f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\#14:\quad f2(x) := \frac{d}{dx} f1(x)$$

$$\#15:\quad f3(x) := \frac{d}{dx} f2(x)$$

Il metodo delle derivate successive richiede inoltre la soluzione di due equazioni: derivata prima =0 (per il calcolo dei punti critici) e derivata seconda=0 (per il calcolo dei flessi).

```
Punti critici (estremi relativi o flessi orizzontali)
#16:  SOLVE(f1(x) = 0, x, Real)
Flessi
#17:  SOLVE(f2(x) = 0, x, Real)
```

L'impostazione dello studio è completa. Conviene salvare il file.

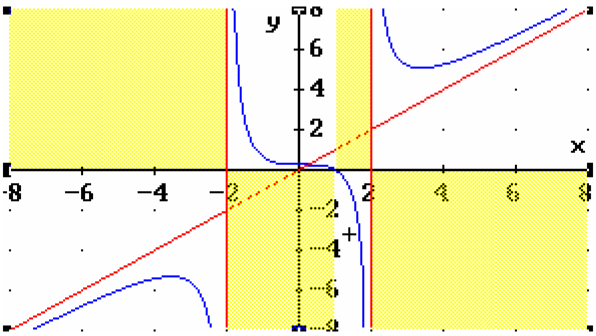
Uso del file
Una volta immessa la funzione che si vuole studiare modificando le espressioni #1 e #2 si procede ai vari studi come segue:
Studio del dominio

Semplificare l'espressione #4 (selezionarla e premere il pulsante =). Risulteranno gli zeri del denominatore, ovvero i punti di discontinuità della funzione.
Calcolo di asintoti

Asintoto verticale☞Calcolare il/i limite/i della funzione f(x) facendo tendere x agli zeri del denominatore; si può utilizzare il tasto lim dopo aver selezionato al funzione.
Asintoto orizzontale (eventuale)☞Semplificare l'espressione #5
Asintoto obliquo (eventuale) ☞Semplificare l'espressione #8
A questo punto conviene rappresentare graficamente gli asintoti trovati (consiglio: usa un colore particolare solo per gli asintoti: in questo modo potrei distinguerli più facilmente!!)
Studio del segno

Si tratta di rappresentare graficamente le espressioni #9 e #10
Studio di crescenza (estremi relativi) e concavità (flessi)

Semplificare l'espressione #16 per calcolare i punti critici; per poterli classificare occorre sostituire tali punti nella derivata seconda; supponiamo che la derivata prima si annulli in `x=4`; basterà scrivere nella barra d'autore `f2(4)=` ; una volta classificati i punti critici, per il calcolo dei flessi occorrerà semplificare l'espressione #17; si sostituiranno poi gli eventuali zeri della derivata seconda nella derivata terza.



Grafico

Infine andrà rappresentata graficamente la funzione e, per poter salvare lo studio e il grafico, occorrerà includere il grafico nel foglio algebra (dall'ambiente grafico, menu File/Incorpora)

Studio di una funzione irrazionale

Particolarità:
<u>Se l'indice di radice è dispari</u> occorre settare il Derive con l'opzione
`Branch := Real`
(oppure dal menu *Dichiara/Impostazioni di semplificazione/Radice n-esima*…Real)

<u>Se l'indice di radice è pari</u> occorre calcolare il dominio facendo risolvere al Derive una disequazione; per esempio, con la funzione $y=\sqrt{x^2-4x}$, occorrerà impostare

$$\mathrm{SOLVE}(x^2 - 4\cdot x \ge 0,\ x,\ \mathrm{Real})$$

Ecco l'espressione semplificata: $x \le 0 \vee x \ge 4$
Per poter riportare lo studio graficamente, facendo colorare la zona dove la funzione non passa, occorre costruire l'espressione $\mathrm{NOT}(x \le 0 \vee x \ge 4)$ e rappresentare graficamente quest'ultima.

Studio di una funzione esponenziale

Particolarità:
Il numero e va inserito prendendo, fra i simboli in basso a destra, la ê; quindi, per esempio, la funzione $y=e^{1-x}$ va inserita come `f(x):=ê^(1-x)`

Studio di una funzione esponenziale

Particolarità:
Derive calcola il logaritmo con le funzioni:`LOG(argomento,base)` e `LN(argomento)`.