Estremi relativi di funzioni a due variabili

1) Data la funzione $z = x^3 + 3x^2 y + y^3 - 3y$
   a) Calcolare gli estremi relativi
   b) Rappresentare graficamente le curve di livello che evidenzino estremi relativi e punti di sella
   c) Rappresentare graficamente la superficie 3D che evidenzi estremi relativi e punti di sella

Svolgimento con il **Derive**
Prerequisiti Derive

- Dichiarazione di una funzione `f(x,y):=`
- Funzione **DIF** per il calcolo di derivata `DIF(funzione, variabile, ordine di derivazione)`. Per le derivate seconde di funzioni a due variabili conviene derivare le derivate prime
- Funzione **SOLVE** per la soluzione di equazioni e sistemi; conviene inserirla utilizzando il menu Risolvi-Sistema
- Comando **Crea matrice**: barra degli strumenti
- Funzione **DET** per il calcolo del determinante di una matrice: `DET(matrice o #espressione contenente la matrice)`
- Funzione VECTOR utile per la creazione di curve di livello: `VECTOR(espressione, variabile, da, a, passo)`

Procedimento

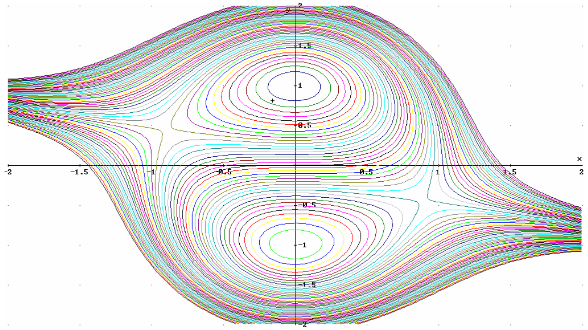
1) Preparazione degli strumenti
   a) Dichiarare la funzione f(x,y)
   `f(x, y) := x^3 + 3·x^2·y + y^3 - 3·y`
   b) Costruire il sistema di equazioni con le derivate prime poste uguali a zero (senza semplificarlo)
   `SOLVE([DIF(f(x, y), x, 1), DIF(f(x, y), y, 1)], [x, y])`
   c) Costruire la matrice con le derivate seconde

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{d}{dx}\right)^1 \left(\frac{d}{dx}\right)^1 f(x, y) & \left(\frac{d}{dy}\right)^1 \left(\frac{d}{dx}\right)^1 f(x, y) \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^1 \left(\frac{d}{dy}\right)^1 f(x, y) & \left(\frac{d}{dy}\right)^1 \left(\frac{d}{dy}\right)^1 f(x, y) \end{bmatrix}$$

   d) Dichiarare la funzione Hessiano H(x,y)come DET della matrice
   `H(x,y):=DET(#3)`
   A questo punto l'espressione 3 può essere eliminata
   e) Dichiararle la funzione z2xx(x,y); la derivata seconda è già calcolata dentro l'Hessiano: utilizzare il tasto F3 per riportarla nella barra autore
   `z2xx(x,y):=DIF(DIF(f(x, y), x, 1), x, 1)`
2) Inizio del calcolo
   a) Semplificare l'espressione con il sistema di equazioni =

$$\left[x = 0 \wedge y = 1,\ x = 0 \wedge y = -1,\ x = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \wedge y = -\frac{\sqrt{5}}{5},\ x = -\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5} \wedge y = \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$$

   b) Per ogni punto critico calcolare il valore di H in qual punto e, se necessario, di z2xx
   c) Classificare il punto mediante un oggetto testo
   Risulteranno, nell'ordine, un min, un max e due punti di sella
   d) Calcolare anche il valore della funzione nel punto (servirà per le rappresentazioni grafiche)
3) Rappresentazione per curve di livello
   a) Costruire una funzione VECTOR dove l'espressione sarà z=f(x,y) assegnando alla z valori in un intervallo che contenga con un certo margine i valori della z nei punti critici precedentemente calcolati
   `VECTOR(z = f(x, y), z, -3, 3, 0.1)`
   b) Semplificare la funzione VECTOR, aprire la finestra grafica 2D e rappresentare graficamente



   c) Incorporare il grafico (Nella finestra grafica File-Incorpora).
   Conviene a questo punto eliminare la lunga espressione ottenuta dalla semplificazione del VECTOR
4) Rappresentazione della superficie 3D
   a) Selezionare la funzione (dovrebbe essere la prima espressione #1)
   b) Aprire la finestra grafica 3D
   c) Impostare l'intervallo del grafico (Imposta-Intervallo del grafico) in modo che x, y, e z contengano con un certo margine le coordinate dei punti critici. *Conviene approssimare le soluzioni in numeri decimali con il comando* Approssima ≈

   d) Disegnare la superficie
   e) Aumentare il numero dei pannelli portandolo a 50 (doppio click nella superficie)
   f) Incorporare il grafico (Nella finestra grafica File-Incorpora)
5) Il lavoro è completo: salvarlo.